11.

Ueber das

sphärische Kurbelgetriebe

und seinen Specialfall

Das Hooke'sche Gelenk.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doctorwürde

an der

Georg-August-Universität

zu Göttingen

von

Felix Buka.

Göttingen 1876.

Druck der Dieterichschen Univ.-Buchdruckerei

W. Fr. Kaestner.

Meinen theuren Eltern

in aufrichtiger Dankbarkeit gewidmet.

Einleitung.

Grundzüge der kinematischen Geometrie auf der Kugel.

Jede Bewegung eines starren Systemes um einen festen Punkt O lässt sich auf die Bewegung einer Kugel K mit dem Mittelpunkte O auf einer gleich grossen festen Kugel K' zurückführen.

Dieser Auffassung gemäss lautet der bekannte Euler'-sche Satz

I. Bei jeder unendlich kleinen Bewegung von K auf K' rotirt K um einen Durchmesser der Kugel.

Letzterer schneide die bewegliche und feste Kugel in $\mathfrak{P}$, dem sogenannten momentanen Pole. Ist die Bewegung eine endliche, so bildet die stetige Aufeinanderfolge der Punkte $\mathfrak{P}$ auf K die Polkurve, auf K' die Polbahn, und es gilt nach Poinsot der Satz:

II. Bei jeder endlichen Bewegung von K auf K' rollt die Polkurve auf der Polbahn.

Des Zusammenhanges wegen mögen zunächst beide Sätze mit Hilfe kinematischer Betrachtungen bewiesen werden.

Die auf K befindlichen Punkte theilen wir in 2 Arten ein, erstens in solche, welche auf K eine unveränderliche Stelle einnehmen und daher nur in Folge der Drehung von K um den jedesmaligen Pol eine sogenannte »Führungs-Geschwindigkeit« besitzen, zweitens in solche, welche während der Bewegung von K auf K selbst noch mit einer »relativen Geschwindigkeit« fortlaufen. Punkte der ersten Art mögen nach Schell's Vorgange »Systempunkte«, die der letzten Art schlechthin »Punkte« genannt werden.

Sind dann u_1 und u_2 die Geschwindigkeiten zweier Systempunkte P_1 und P_2 von K, so bedingt die Starrheit des Systems, dass die Componenten dieser Geschwindigkeiten in Richtung der Sehne P_1P_2 gleich und gleichgerichtet seien[1]). Wenn demnach die in P_1 und P_2 an den Hauptkreis P_1P_2 gelegten Tangenten mit der Sehne P_1P_2 den Winkel β und mit u_1 und u_2 die Winkel α_1 und α_2 bilden, ferner der Radius von K die Längeneinheit ist, so muss

$$u_1 . \cos\alpha_1 . \cos\beta = u_2 . \cos\alpha_2 . \cos\beta$$

oder

$$1.)\quad u_1 \cos\alpha_1 = u_2 . \cos\alpha_2$$

sein. Schneiden sich ferner die in P_1 und P_2 zu u_1 und u_2 normalen Hauptkreise in $\mathfrak{P}$, so ist

$$2.)\quad \sin P_1\mathfrak{P} . \cos\alpha_1 = \sin P_2\mathfrak{P} . \cos\alpha_2$$

also auch

$$3.)\quad \frac{u_1}{\sin P_1\mathfrak{P}} = \frac{u_2}{\sin P_2\mathfrak{P}}.$$

$\sin P_1\mathfrak{P}$ kann als senkrechte Entfernung des Punktes P_1 von der Geraden $O\mathfrak{P}$, und der von P_1 in der Zeit dt zurückgelegte Weg ds_1 demnach als Resultat einer Rotation von P_1 um $O\mathfrak{P}$ mit einer gewissen Winkelgeschwindigkeit Ω aufgefasst, also

$$ds_2 = u_2 . dt = \sin P_2\mathfrak{P} . \Omega\, dt = \sin P_2\mathfrak{P} . d\vartheta$$

gesetzt werden. Dann folgt aus 3.) sofort

$$ds_2 = u_2 . dt = \sin P_2\mathfrak{P} . \Omega\, dt = \sin P_2\mathfrak{P} . d\vartheta$$

d. h. durch dieselbe Rotation um die so gefundene Gerade $O\mathfrak{P}$ gelangt auch P_2 in seine endgültige Lage. Da nun nach unserer Voraussetzung über den Punkt O die Ortsveränderungen der beiden Punkte P_1 und P_2 die des ganzen Systems bestimmen, ist hiermit der unter I angeführte Satz bewiesen.

Satz II folgt aus nachstehender einfacher Betrachtung

1) Der Leser wird gebeten die Figuren selbst zu zeichnen.

Da K um $O\mathfrak{P}$ rotirt, besitzt $\mathfrak{P}$ keine Führungsgeschwindigkeit und es ist daher seine absolute Geschwindigkeit auf der festen Kugel K' gleich seiner relativen. Folglich muss $\mathfrak{P}$ in jedem Momente auf K und K' gleiche Bogenelemente beschreiben d. h. die Polkurve rollt auf der Polbahn.

III. Den momentanen Berührungspunkt B einer auf K verzeichneten Hüllkurve C mit der von ihr auf K' erzeugten Hüllbahn C' giebt derjenige Punkt B von C an, dessen sphärische Normale[1]) durch den momentanen Pol $\mathfrak{P}$ geht.

Denn da sowohl die Führungsgeschwindigkeit als auch die absolute Geschwindigkeit von B auf der sph. Normale $B\mathfrak{P}$ senkrecht stehen, liegen beide und natürlich auch die absolute Geschwindigkeit in ein und derselben Geraden, der gemeinschaftlichen Tangente beider Kurven. Ferner folgt ohne Weiteres, dass das Bogenelement der Hüllbahn gleich der algebraischen Summe aus dem Bogenelemente der Hüllkurve und der Führungsgeschwindigkeit des »beschreibenden« Punktes B ist. — (Vergl. Aronhold, Grundzüge der kinematischen Geometrie in d. Verh. d. Vereins z. Beförd. des Gewerbfleisses in Preussen, 51. Jahrg. §. 5, 15 u. 16.)

Für die kinematische Geometrie der Ebene ist der Savary-Bobillier'sche Satz (siehe Aronhold, ibid. §§ 6, 7), wel-

---

1) Wird der Bogen PM eines Hauptkreises um M gedreht, so beschreibt P einen kleinen Kugelkreis, daher soll M sphärischer Mittelpunkt, PM sphärischer Radius derselben genannt werden. Der Hauptkreis, welcher das Bogenelement einer sph. Kurve enthält und den zu diesem Elemente normalen Hauptkreis wollen wir mit sph. Tangente und sph. Normale bezeichnen. Zwei aufeinanderfolgende sph. Normalen treffen sich im sph. Krümmungsmittelpunkte M, wobei M immer der vom betreffenden Kurvenpunkte P um weniger als $\frac{\pi}{2}$ entfernte Schnittpunkt der Hauptkreise sei. $MP = \varrho$ ist der sphär. Krümmungsradius. Der eigentliche Krümmungsradius ist $= \sin\varrho$. Für $\varrho = \frac{\pi}{2}$ wechselt die sph. Kurve die Krümmung.

cher eine bestimmte zwischen den Punkten der festen und der beweglichen Ebene bestehende Beziehung ausdrückt, von fundamentaler Bedeutung. Die durch den genannten Satz in Beziehung gesetzten Punkte sind die zum momentanen Berührungspunkte einer beliebigen Hüllbahn und ihrer Hüllkurve gehörigen Krümmungsmittelpunkte; daher bietet er unter Anderem ein vortreffliches Hilfsmittel zur Untersuchung der Krümmungsverhältnisse solcher Kurven, welche durch wirkliche Bewegung einer starren Ebene in sich selbst entstehen. Gleiches leistet der folgende von Herrn Prof. Dr. Aronhold herrührende Satz für die kinematische Geometrie der Kugel und spreche ich meinem hochverehrten Lehrer nicht allein dafür, dass er mir gestattet dieses Theorem zuerst veröffentlichen zu dürfen, sondern überhaupt für die mir seit Beginn meiner Studien in so reichem Maasse gewährte Förderung an dieser Stelle meinen besten Dank aus.

$\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ seien zwei unmittelbar aufeinander folgende Pole; C eine auf K liegende Kurve. Die aus $\mathfrak{P}$ an C gelegte sph. Normale ergiebt den Berührungspunkt von C mit ihrer Hüllbahn B. Durch die Rotation von K um $\mathfrak{P}$ gelangt C in die Lage C_1 und die sph. Normale $P\mathfrak{P}$ etwa in die Lage $p\mathfrak{P}$. Die aus $\mathfrak{P}_1$ an C_1 gelegte sph. Normale trifft C_1 in ihrem Berührungspunkte P_1 mit B.

M_1, der Schnittpunkt von $p\mathfrak{P}$ und $P_1\mathfrak{P}_1$, und M', der Schnittpunkt von $P\mathfrak{P}$ und $P_1\mathfrak{P}_1$ sind demnach zugehörige sph. Krümmungsmittelpunkte von Hüllkurve resp. Hüllbahn. M sei die vorige Lage von M_1 also $\mathfrak{P}PM = \mathfrak{P}p\,M_1$.

Wir projiciren jetzt sämmtliche Punkte der Kugeln K und K' aus O auf ihre Tangentialebene in $\mathfrak{P}$. Die Centralprojektion eines Punktes Pk sei P^0k. Der Winkel, welchen das im Sinne der stattfindenden Rotation gedrehte Bogenelement $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1 = dS$ bis zu seinem erstem Zusammenfallen mit $\mathfrak{P}MM'$ beschreibt, sei α. Der in $\mathfrak{P}$ auf $M\mathfrak{P}$ normale Hauptkreis treffe M_1M' in $\mathfrak{p}$, so ist

$$\frac{M^0M^0{}_1}{\mathfrak{P}\mathfrak{p}} = \frac{M^0\,M^{0\prime}}{\mathfrak{P}M^{0\prime}}$$

oder, da

$$M^0 M^0{}_1 = \mathfrak{P}M_0 . d\vartheta$$

$$\mathfrak{P}\mathfrak{p} = dS . \sin\alpha,$$

nach leichter Umformung:

$$\text{IV.} \qquad \left(\frac{1}{M^0\mathfrak{P}} + \frac{1}{M^{0\prime}\mathfrak{P}}\right)\sin\alpha = \left(\frac{1}{tg M\mathfrak{P}} + \frac{1}{tg\mathfrak{P}M'}\right)\sin\alpha$$

$$= \frac{d\vartheta}{dS} = \text{Constans.}$$

wobei das pos. oder neg. Zeichen in der Klammer auftritt, jenachdem M und M' durch den Pol getrennt sind oder nicht.

Aus IV folgt, da die Savary'sche Relation für die Ebene (Aronhold, Grundzüge § 6,)

$$\left(\frac{1}{M^0\mathfrak{P}} + \frac{1}{\mathfrak{P}M^{0\prime}}\right)\sin\alpha = \frac{d\vartheta}{dS}$$

lautet, der Satz:

IV. Zwischen den Centralprojectionen zugehöriger Krümmungsmittelpunkte auf die Tangentialebene im Pol gilt die Savary-Bobillier'sche Relation.

Mit andern Worten:

IV*. Jede zur momentanen Drehaxe normale Ebene scheidet einhüllende und eingehüllte Kegel in solchen Kurven, dass die zum momentanen Berührungspunkte der letzteren gehörigen Krümmungsmittelpunkte auf den zur momentanen Berührungskante der Kegel gehörigen Krümmungsaxen liegen.

Mit Hilfe der entwickelten Principien soll die Bewegung einer um ihren Mittelpunkt drehbaren Kugel untersucht werden, wenn ein Hauptkreis k derselben durch einen festen Punkt A geht und mit einem seiner Punkte K' einen kleinen Kugelkreis a' beschreibt. —

Da ein ebenes System, dessen Bewegung so geregelt ist, dass eine seiner Geraden durch einen festen Punkt geht und mit einem ihrer Punkte einen Kreis beschreibt, »Kurbelgetriebe«[1]) genannt wird, und der Geraden resp. dem Kreise in der Ebene der Hauptkreis resp. kleine Kreis auf der Kugel entspricht, nennen wir das vorliegende Kugelsystem:

Das sphärische Kurbelgetriebe.

Es sei noch

A' der Pol } von a'
c der sphärische Radius } von a'
K der Pol von k
$2d$ die Länge des Bogens AA'.

Polbahn.

Hätten wir k in irgend einer Lage, so liegt der Pol $\mathfrak{P}$, wenn wir A als unendlich kleine Hüllbahn der Hüllkurve k auffassen, nach Satz III der Einleitung

1. in dem zu k normalen grössten Kreise $A\mathfrak{P}$
und weil a' Roulette des Punktes K' ist
2. in dem zu a' normalen Kreise $A'K'$.

Sei nun OA' die z' Achse eines rechtwinkligen Coordinatensystems, der grösste Kreis AA' die $z'x'$ Ebene desselben, so gelten, wenn wir

den Winkel $AA'\mathfrak{P}$ mit ψ
und den Bogen $A'\mathfrak{P}$ mit φ

bezeichnen, folgende Gleichungen:

$$1.)\quad \cos 2d . \cos c + \sin 2d \sin c . \cos \psi = \cos AK'.$$

$$2.)\quad \cos AK' . \cos A\mathfrak{P} = \cos (c - \varphi)$$

$$3.)\quad \cos A\mathfrak{P} = \cos 2d \cos \varphi + \sin 2d \sin \varphi . \cos \psi.$$

---

1) Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte pg. 40. Reuleaux, Theoretische Kinematik pg. 324.

Der in 3.) stehende Werth für cos $A\mathfrak{P}$ wird in 2.), der dann für cos AK' resultirende in 1.) substituirt, dadurch erhält man:

$$[\cos 2d . \cos c + \sin 2d . \sin c \cos\psi] [\cos 2d . \cos\varphi + \sin 2d \sin\varphi \sin\psi]$$

$$= \cos c . \cos\varphi + \sin c . \sin\varphi$$

Setzen wir jetzt

$$\cos\varphi = z'; \ \cos\psi . \sin\varphi = x'; \ \sin\psi \sin\varphi = y';$$

so folgt:

$$\cos^2 c . \sin^2 2d [x'^2 + y'^2] [x' \cos 2d - z' . \sin 2d]^2$$

$$= \sin^2 c [\sin 2d \cos 2d \, y'z' - y'^2 - x'^2 . \cos^2 2d]^2$$

als Gleichung des festen Polkegels, welcher also vom 4ten Grade ist.

Polkurve.

Ausser dem grössten Kreise k umhüllt noch eine Kurve der beweglichen Kugel einen Punkt, nemlich der um K' mit dem sphärischen Radius c beschriebene Kreis k'. Mithin gelangen wir durch das Princip der Umkehrung der Bewegung zu folgendem Systeme:

Gegeben ist ein fester grösster Kreis k und auf ihm der Mittelpunkt K' eines mit dem sphärischen Radius c beschriebenen Kreises k'. Der Bogen AA' eines grössten Kreises von der Länge $2d$ soll mit seinen Endpunkten diese Kurven als Rouletten beschreiben.

Die Polbahn dieses Systems ist die Polkurve des gegebenen; wir bestimmen ihre Gleichung in einem Coordinatensysteme, dessen ζAchse der Radius OK' ist und dessen $\zeta\xi$Ebene mit der des grössten Kreises k zusammenfällt. Haben wir dann den Bogen AA' in irgend einer Lage gegeben, so dienen zur Bestimmung des Poles als Schnittpunkt der grössten Kreise $K'A'$ und AK folgende 3 Gleichungen, in welchen λ den Winkel $\zeta AA'$, ψ' den Winkel $AK'A'$, φ den Bogen $K'\mathfrak{P}$ bezeichnet.

$$1.)\quad \sin\varphi' . \sin\psi' = \sin A\mathfrak{P}$$

$$2.)\quad \cos A\mathfrak{P} \cos 2d + \sin A\mathfrak{P} . \sin 2d . \sin\lambda = \cos(\varphi' - c)$$

$$3.)\quad \sin 2d . \sin\lambda = \sin c . \sin\psi'.$$

Durch Elimination von $\cos A\mathfrak{P}$, $\sin A\mathfrak{P}$ und $\sin\lambda$ gelangen wir zur Gleichung

$$\cos 2d \sqrt{1 - \sin^2\varphi' \sin^2\psi'} + \sin\varphi' . \sin^2\psi' . \sin c$$
$$= \cos c . \cos\varphi' + \sin c \sin\varphi',$$

also in rechtwinkligen Coordinaten:

$$\cos 2d \sqrt{\xi^2 + \zeta^2} \sqrt{\xi^2 + \eta^2} + \eta^2 \sin c$$
$$= [\cos c . \zeta + \sin c \sqrt{\xi^2 + \eta^2}] \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$$

oder

$$[\cos^2 2d (\xi^2 + \zeta^2)(\xi^2 + \eta^2) - \sin^2 c\, \xi^4 - \cos^2 c\, \zeta^2 (\xi^2 + \eta^2)]^2$$
$$= 4 \sin^2 c \cos^2 c\, \xi^4 \zeta^2 (\xi^2 + \eta^2).$$

Der bewegliche Polkegel ist mithin ein Kegel 8ten Grades.

Durch kinematische Betrachtungen finden wir folgende Eigenschaften unserer Polbahnen.

Wenn k mit dem grössten Kreise AA' zusammenfällt, also A momentaner Pol ist, so fällt K in den Pol C des grössten Kreises AA'. Nun ist die Roulette von K ein grösster Kugelkreis a mit dem Pol A. Also sind, wenn mit B der Schnittpunkt der Kreise AA' und a' bezeichnet wird, A und C; B und A' zugehörige Krümmungsmittelpunkte, B also Collineationscentrum, BA Collineationsachse (Aronhold, Grundzüge etc. Satz VIII u. IX). Dieselbe fällt mit der einen Centralen $A'B$ zusammen, folglich auch die Tangente im Pol mit der anderen Centralen AC; mithin ist AC sph. Tangente der Polbahn im Punkte A; d. h. die Polbahn schneidet AA' rechtwinklig. (AA' bedeute der Kürze halber den durch A und A' bestimmten grössten Kreis.) Wenn der Kreis k einen Winkel von 90^0 beschrieben hat, ist A_1 Pol und, wie eine der vorigen analoge Betrachtung zeigt, $A'K'$ Tangente der Bahn. Gelangt K' in den Schnittpunkt C' von $A'C$ mit a', so liegt der Pol A_0 auf $A'C$ und zwar durch A' von C getrennt. Ist endlich k um 180^0 aus der Anfangslage gebracht, so ist wieder A Pol und wieder schneidet die Kurve AA' in A unter einem rechten Winkel.

Dieser Hälfte der Polbahn ist die andere, welche $\mathfrak{P}$ beschreibt, während k in die Anfangslage zurückkehrt, symmetrisch.

Wir fassen dies kurz zusammen.

Die Polbahn liegt symmetrisch zu AA'; A und A' sind Doppelpunkte; in ersterem schneidet sie ihre Symmetrieachse zweimal rechtwinklig. $A'C$ trifft sie ausser in A' noch in zwei von A' gleich weit abliegenden Punkten.

Nennen wir den Schnittpunkt von k und k' ω, so ergibt sich für die Polkurve:

k ist Symmetrieachse derselben und wird von ihr in zwei von ω um $2d$ entfernten Punkten rechtwinklig geschnitten; (sie mögen A_1 und A_2 heissen) ebenso k' in den Punkten A'_1 und A'_2, welche beim Rollen auf den Punkt A' der Polbahn fallen.

Die Bogenlängen $A'A'_1$ und A'_1A_2 der Polkurve sind den Bogenlängen AA'; $A'A_0A$ der Polbahn gleich.

Die bisherigen Betrachtungen gelten zum Theile nur, so lange $2d < c$ ist. Je näher Punkt A an B rückt, desto enger wird die Schlinge $AA'A$; für $2d = c$ verschwindet sie vollständig. Die Polkurve geht alsdann durch K' hindurch.

Sobald aber $2d > c$ ist, ist A' kein Punkt der Polbahn mehr; diese schneidet AA' nur noch in A und dem Gegenpole von A, beidemal rechtwinklig.

Die Polkurve liegt dann vollständig auf dem durch k' abgetrennten grösseren Theile der Kugel und besteht aus 2 symmetrischen Theilen. Jeder Theil schneidet k in zwei Punkten rechtwinklig, erstens in dem von ω um $2d$ und zweitens in dem von ω um $180 - 2d$ entfernten Punkte, wo

ω' der zweite Schnittpunkt der Kreise k und k' ist. Endlich geht die Kurve durch K und den Gegenpol dieses Punktes und wird von dem durch K und den betreffenden Punkt A gehenden grössten Kreise in K berührt.

Die **Tangenten** an die sph. Polbahnen lassen sich leicht nach dem Seite 12 mehrfach angewandten Verfahren für jeden beliebigen Punkt derselben construiren.

Wenn c unter der Voraussetzung $2d < c$ immer mehr wächst, so wird sich, da $A'A_0 = 90^0 - c$ ist, Punkt A_0 der Polbahn immer mehr dem Punkte A', der Zweig $A'A_0\,A$ dem ihm zugewandten Zweige $A'A$, und die sph. Tangente in A_0 der in A' nähern.

Tritt endlich der Specialfall $c = 90^0$ ein, so besteht die Polbahn aus zwei einander deckenden sph. Ellipsen. Denn die Büschel AK' und $A'K'$ sind beide perspectivisch zu a' und die Strahlen des Büschels $A\mathfrak{P}$ stehen normal zu denen des Büschels AK', folglich ist Büschel $A\mathfrak{P}$ projectivisch zu Büschel $A'K'$. Sie befinden sich in schiefer Lage und erzeugen mithin eine durch A und A' gehende sphärische Ellipse. Aus Gründen der Symmetrie ist AA' deren Achse. Nun erhalten wir als Gleichung des Polkegels aus der früheren (Seite 11)

$$y'^2 + x'^2 . \cos^2 2d - \sin 2d . \cos 2d . x' z' = 0.$$

Wir bringen diese mithin auf die Normalform, wenn wir die $z'x'$ Ebene um d nach A zu drehen, während die y' Achse unbewegt bleibt. Zwischen den alten und den neuen Coordinaten gelten dann die Relationen:

$$x' = x . \cos d + z . \sin d\,;\; z' = - x . \sin d + z . \cos d.$$

Daher ist:

$$x'z' = -\frac{x^2}{2} . \sin 2d + \frac{z^2}{2} \sin 2d + z . x . \cos 2d$$

$$x'^2 = x^2 . \cos^2 d + z^2 . \sin^2 d + zx . \sin 2d$$

Obige Gleichung lautet demnach in den neuen Coordinaten:

$$y^2 + x^2\left[\cos^2 d \,.\, \cos 2d + \frac{\sin^2 2d}{2}\right]\cos 2d$$

$$+ z^2\left[\sin^2 d \,.\, \cos 2d - \frac{\sin^2 2d}{2}\right]\cos 2d = 0$$

oder

$$\frac{x^2}{\sin^2 d} + \frac{y^2}{\sin^2 d \,.\, \cos^2 d \,.\, \cos 2d} - \frac{z^2}{\cos^2 d} = 0$$

Als Gleichung des beweglichen Polkegels erhalten wir aus der betreffenden früheren Gleichung:

$$\xi^4 = \cos^2 2d\,[\xi^2 + \eta^2][\xi^2 + \zeta^2]. \text{ —}$$

Wir schicken der Diskussion dieser Polbahnen einige Bemerkungen voraus, welche die Bewegung des Systems veranschaulichen helfen, zum Theil auch für die folgenden Rechnungen und Constructionen von Nutzen sind.

Der Pol K des Kreises k beschreibt als Roulette den grössten Kreis a, dessen Pol A ist. — Mithin kann der Specialfall auch folgendermassen aufgefasst werden:

II. Der Quadrant $K'K$ eines grössten Kreises bewegt sich mit seinen Endpunkten auf zwei grössten Kreises a und a'.

Das vorliegende System ist mithin identisch mit dem Hooke'schen Gelenke[1]). —

Ferner geht der grösste Kreis k' dessen Pol K' ist, während der Bewegung durch A'; also lautet die Fassung

III. Die Schenkel k und k' eines sphärischen rechten Winkels gehen fortwährend durch zwei feste Punkte.

Der Schnittpunkt ω der grössten Kreise k und k' beschreibt eine sphärische Ellipse E, welche die Polbahn in den Punkten A und A' berührt, weil die Büschel A und A' dadurch, dass jedem Strahle des einen der zu ihm rechtwinklige des andern zugeordnet wird, projectivisch sind; ausserdem folgt hieraus, dass die zu A und A' perspectivischen grössten

1) Reuleaux. Theor. Kinematik pg. 331. 386.

Kreise a und a' ebenfalls projectivisch sind, dass also $K'K$ eine sphärische Ellipse E' umhüllt[1]). Der durch $\mathfrak{P}$ zu KK' normale Hauptkreis trifft nach Satz III der Einleitung KK' im Berührungspunkte B mit E', und da dieser Kreis durch den Pol ω von KK' hindurchgeht, ist $\omega B = \frac{\pi}{2}$, also stehen die Tangentialebenen des Kegels $\omega E'$ normal auf den Kanten des Kegels OE, d. h.

E und E' sind einander durch Reciprocität zugeordnet.

Fassen wir dies kurz zusammen, so ergiebt sich:

Wenn die Endpunkte einer Seite eines Kugeloctanten zwei grösste Kreise beschreiben, gehen die beiden andern Seiten durch zwei feste Punkte, beschreibt der dritte Eckpunkt eine sphärische Ellipse und umhüllt die erst betrachtete Seite eine ebensolche Kurve.

Discussion.

Polbahn.

Da bei der Bewegung des ebenen Antiparallelogramms[2]) die Polbahnen zwei congruente Kegelschnitte sind, ergibt sich aus der kinematischen Untersuchung dieses Systemes mit Leichtigkeit ausser einigen wichtigen Sätzen über diese Kurven eine einfache Formel und Construction für den Krümmungsradius derselben.

Unsere Polbahn ist eine sphärische Ellipse, wir müssen ihren Krümmungsradius finden, um aus ihm mit Hülfe des Savary'schen Satzes den der Polcurve 8ten Grades zu construiren, und so liegt der Gedanke nahe zu untersuchen, ob sich aus der Betrachtung eines in Bewegung gesetzten sphärischen überschlagenen Vierecks ähnliche Constructionen für die sph. Ellipse ergeben. — Eine solche Bewegung wäre folgendermassen zu definiren.

---

1) Steiner, Systematische Entwickelungen pg. 220.

2) Reuleaux, Theor. Kinematik pg. 323.

Auf einer Kugel vom Radius 1 seien zwei kleine Kreise mit dem sphärischen Radins $2d$ um die Punkte F und F_1 beschrieben. Ein dem Bogen FF_1 gleicher Bogen eines grössten Kreises: ff_1 bewegt sich mit seinen Endpunkten auf denselben.

$$FF_1 \text{ sei gleich } 2c;\ d > c.$$

Der Schnittpunkt $\mathfrak{P}$ von Ff_1 und F_1f ist der momentane Pol. Nun sind in den sphärischen Dreiecken ff_1F_1 und FF_1f_1 alle Seiten einander gleich, folglich auch die Winkel. Die beiden sphärischen Dreiecke $f\mathfrak{P}f_1$ und $F\mathfrak{P}F_1$ sind also symmetrisch und es ist mithin:

$$F\mathfrak{P} = \mathfrak{P}f \text{ und } F_1\mathfrak{P} = \mathfrak{P}f_1$$

also auch

$$f\mathfrak{P} + \mathfrak{P}f_1 = F\mathfrak{P} + \mathfrak{P}F_1 = 2d \text{ d. h.}$$

Polbahn und Polkurve sind zwei congruente sphärische Ellipsen.

Da f und F_1; f_1 und F zugehörige Krümmungsmittelpunkte sind, ist C, der Schnittpunkt von ff_1 und FF_1, das Collineationscentrum, $C\mathfrak{P}$ Collineationsachse. Sie bildet mit beiden Centralen fF_1; Ff_1 denselben Winkel, fällt also mit der Poltangente zusammen und wir erhalten den bekannten Satz:

Der Tangentialkreis der sphärischen Ellipse halbirt den Aussenwinkel der nach dem Berührungspunkte gehenden Radienvectoren.

Wendekreis.

(Aronhold, Grundzüge etc. § 8.)

Wir projiciren jetzt sämmtliche Punkte der Kugel von O (dem Centrum) aus auf ihre Tangentialebene in $\mathfrak{P}$; tragen dann auf der Geraden $f^0F_1^0$ $f^0\mathfrak{P}$ nach der andern Seite von f^0 ab und suchen zu dem so erhaltenen Punkte Q und den Punkten F_1^0 und $\mathfrak{P}$ den vierten harmonischen W; Derselbe ist alsdann ein Punkt des Wendekreises. Bezeichnen wir noch die Bögen $F\mathfrak{P}$ mit r; $F_1\mathfrak{P}$ mit r_1, den Winkel zwischen Tangente und Radiusvector mit u, so ist:

$$f^0 W(tg\,r + tg\,r_1) = tg^2 r \text{ also}$$

$$W\mathfrak{P} = tg\,r - f^0 W = \frac{tg\,r \,.\, tg\,r_1}{tg\,r + tg\,r_1}$$

mithin der Durchmesser des Wendekreises

$$H = \frac{tg\,r \,.\, tg\,r_5}{(tg\,r + tg\,r_1) \,.\, \sin u}.$$

Krümmungsradius.

Da beide Ellipsen congruent sind und symmetrisch zu einander liegen, sind in jedem Augenblicke die Krümmungsradien von Pol-Bahn und Kurve einander gleich. Es ist daher, wenn man dieselben mit ϱ bezeichnet.

$$\frac{2}{tg\,\varrho} = H \qquad \text{d. h.}$$

$$tg\,\varrho = \frac{2 \,.\, tg\,r \,.\, tg\,r_1}{\sin u\,(tg\,r + tg\,r_1)}$$

Analog einer bekannten Construction des Krümmungsmittelpunktes der ebenen Ellipse lässt sich auch der Krümmnngsmittelpunkt einer sph. Ellipse auf folgende Art finden:

Trifft die sph. Normale die Achse der sph. Ellipse in N, der in N zu ihr senkrechte Hauptkreis den sph. Radiusvector in N_1, so trifft der in N_1 zum sph. Radiusvector normale Hauptkreis die sph. Normale im Krümmungsmittelpunkte.

Da nemlich

$$\frac{\mathfrak{P}N^0}{F^0 f^0} = \frac{\mathfrak{P}F_1{}^0}{f^0 F_1{}^0} \text{ ist, ist}$$

$$\mathfrak{P}N^0 = \frac{2 \,.\, tg\,r \,.\, tg\,r_1}{tg\,r + tg\,r_1} \,.\, \sin u, \text{ also}$$

$$tg\,\mathfrak{P}M = \frac{tg\,\mathfrak{P}N}{\sin^2 u} = \frac{2 \,.\, tg\,r \,.\, tg\,r_1}{\sin u(tg\,r + tg\,r_1}$$

d. h. $\mathfrak{P}M = \varrho$.

Der Formel für $tg\,\varrho$ können wir noch eine bessere Gestalt geben.

Wir sehen zunächst, dass

$$\frac{tg\,r\,.\,tg\,r_1}{tg\,r + tg\,r_1} = \frac{\sin r\,.\,\sin r_1}{\sin 2d} \text{ ist.}$$

Ferner ist das Product aus den sin. der Bögen, welche von den Brennpunkten einer sph. Ellipse auf einen Tangential-Kreis gefällt werden, konstant und zwar, weil

1.) $\cos r\,.\cos r_1 - \sin r\,.\sin r_1\,.\cos 2u = \cos 2c$ und

2.) $\cos r\,.\cos r_1 - \sin r\,.\sin r_1 = \cos 2d$,

also

$$\sin r\,.\sin u\,.\sin r'\,.\sin u' = \frac{\cos 2c - \cos 2d}{2}$$

ist,

gleich $\sin(d-c)\,.\sin(d+c)$.

Mithin ist

$$tg\,\varrho = \frac{2\,.\sin(d-c)\,.\sin(d+c)}{\sin 2d}.$$

Ist jetzt R der Fusspunkt eines von N auf r_1 gefällten Lothes, so ist

$$tg\,\mathfrak{P}N = \frac{tg\,\mathfrak{P}R}{\sin u}$$

also

$$tg\,\mathfrak{P}R = \frac{2\,.\sin(d-c)\,.\sin(d+c)}{\sin 2d}.$$

Aus diesem Ausdrucke wird nun, sobald man einmal die kleine Achse der Ellipse als Normale betrachtet,

$$\frac{tg^2\,b}{tg\,d} \qquad \text{d. h.}$$

Die Projection der Normale auf den Radiusvector der sphärischen Ellipse ist constant.

Mit Hilfe dieses Satzes wird

$$tg\,\varrho = \frac{tg^2\,b}{tg\,d\,.\sin^3 u}.$$

Wir kehren jetzt zur Hauptaufgabe zurück.

Polkurve.

Die Umkehrung von Fassung III des Specialfalles lautet:
Der Bogen AA' grössten Kreises bewegt sich mit seinen Endpunkten auf den Schenkeln k und k' eines sphärischen rechten Winkels.

Bezeichnen wir mit α und α' die Bögen ωA und $\omega A'$, so sind $tg\alpha$ und $tg\alpha'$ die rechtwinkligen Coordinaten des Schnittes der Tangentialebene in ω mit dem beweglichen Polkegel. Die Gleichung desselben erhalten wir, wenn wir in der leicht ersichtlichen Relation

$$\cos\alpha . \cos\alpha' = \cos 2d$$

die linke Seite durch $tg\,\alpha$ und $tg\,\alpha'$ ausdrücken, sie ist

$$1 = \cos^2 2d\,(1 + tg^2\alpha)\,(1 + tg^2\alpha').$$

Diesen Schnitt werden wir diskutiren.

Construction.

Der kleinste Werth, welchen $1 + tg^2\alpha$ annehmen kann ist 1; $1 + tg^2\alpha'$ ist dann $= \frac{1}{\cos^2 2d}$. Tragen wir also auf einer Geraden die Strecke $BC = 1$ ab und nach der andern Seite $CD = \frac{1}{\cos 2d}$, schlagen über BD als Durchmesser einen Kreis, so können die Segmente B,C und CD' irgend einer Sehne $B'D'$ den Grössen

$$\sqrt{1 + tg^2\alpha};\quad \sqrt{1 + tg^2\alpha'}$$

gleichgesetzt werden.

Die Projection der Kreise k und k' auf die Tangentialebene in ω sei $\omega\zeta$ und $\omega\eta$. Auf der negativen Seite dieser Achsen trägt man 1 ab und erhält die Punkte ζ_0; η_0. Schlägt man dann mit CD' von ζ_0 aus einen Bogen, welcher die η Achse in A'_0 trifft, so ist $\omega A'_0 = tg\,\alpha'$. Der mit $B'C$ von η_0 aus geschlagene Bogen gibt das zugehörige $tg\,\alpha$. Damit ist $\mathfrak{P}_0$ gefunden. Wir können aber auch mit $B'C$ von ζ_0 und mit CD' von η_0 aus Bögen schlagen um einen Punkt der Kurve zu finden. Daraus folgt:

Die Polkurve liegt symmetrisch zu den Coordinatenachsen und den Winkelhalbirungslinien derselben.

Eine einfache Rechnung ergibt ferner.

Die Maximalwerthe der durch ω gehenden Radienvectoren liegen auf beiden Achsen und sind gleich $tg\,2d$; die Minimalwerthe liegen auf den Winkelhalbirungslinien des Coordinatensystems und sind $= \frac{2 \,.\, \sin d}{\sqrt{\cos 2d}}$.

Tangente.

Da

$$\zeta = tg\,\alpha; \quad \eta = tg\,\alpha'$$

ist, ist

$$tg\,\tau = \frac{d\eta}{d\zeta} = \frac{\cos^2\alpha \,.\, d\alpha'}{\cos^2\alpha' \,.\, d\alpha}.$$

Aus Gleichung 1. folgt aber

$$0 = -\sin\alpha \,.\, \cos\alpha' \,.\, d\alpha - \sin\alpha' \,.\, \cos\alpha \,.\, d\alpha'$$

also

$$\frac{d\alpha'}{d\alpha} = -\frac{\sin\alpha \,.\, \cos\alpha'}{\cos\alpha \,.\, \sin\alpha'}$$

mithin ist

$$tg\,\tau = -\frac{\sin\alpha \,.\, \cos\alpha'}{\cos\alpha \,.\, \sin\alpha'} \cdot \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha'} = -\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha'}$$

Da α und α' stets kleiner als 90^0 sind, ist τ stets grösser als 90^0.

Construction der Tangente.

Beschreiben wir um ζ_0 und η_0 mit dem Radius 1 Kreise, verbinden A'_0 mit ζ_0, so ist Winkel $A'_0\,\zeta_0\,\omega = \alpha'$, also $\sin 2\alpha'$ sehr leicht zu construiren, ebenso $\sin 2\alpha$. Erstere Strecke trägt man auf der ζ, letztere auf der η Achse ab. Die Gerade, welche ihre Endpunkte verbindet, ist der Tangente der Kurve in $\mathfrak{P}^0$ parallel. — Aus dieser Construction ergiebt sich:

Die Polkurve schneidet die Coordinatenachsen und deren Winkelhalbirungslinien rechtwinklig.

Wendepunkte.

Wir fanden

$$tg\,\tau = -\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha'}$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = -\frac{2\sin 2\alpha' . \cos 2\alpha\, d\alpha - 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha' . d\alpha'}{\sin^2 2\alpha}$$

$$= 2.d\alpha . \frac{\sin 2\alpha . \cos 2\alpha' \cos\alpha' . \sin\alpha + \sin 2\alpha' \cos 2\alpha \sin\alpha' \cos\alpha}{\sin^2 2\alpha . \cos\alpha . \sin\alpha'.}$$

also

$$d\tau = -4 . d\alpha . \frac{\cos\alpha . \cos\alpha'}{\cos\alpha . \sin\alpha'} . \frac{[\sin^2\alpha . \cos 2\alpha' + \sin^2\alpha' . \cos 2\alpha]}{\sqrt{\sin^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha'}}.$$

Für einen Wendepunkt ist $d\tau = 0$ d. h.

$$\sin^2\alpha . \cos 2\alpha' = -\cos 2\alpha . \sin^2\alpha';$$

oder

$$3(\cos^2\alpha + \cos^2\alpha') - 4 . \cos^2 2d - 2 = 0;$$

es ist aber

$$\cos^2\alpha + \cos^2\alpha' = \frac{1}{tg^2\alpha + 1} + \frac{1}{tg^2\alpha' + 1} = (2 + r^2)\cos^2 2d$$

wo

$$r^2 = tg^2\alpha + tg^2\alpha'$$

ist.

Substituirt man den oben gefundenen Werth in die vorige Gleichung, so erhält man als Länge des nach den Wendepunkten gehenden Radiusvector

$$r = tg\,2d . \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Dieser Ausdruck construirt sich am besten in der Form

$$r = tg\,2d \,.\, \frac{\sin 45^0}{\sin 60^0}$$

Wir fanden früher

$$r_{\min} = \frac{2 \,.\, \sin d}{\sqrt{\cos 2d}}$$

Soll also ein Wendepunkt existiren, so muss mindestens

$$\frac{2 \,.\, \sin d}{\sqrt{\cos 2d}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\, tg\,2d$$

oder

$$4 \,.\, \sin^2 d = 1 \text{ d. h. } d = 30^0$$

sein.

Die Kurve hat reelle Wendepunkte nur wenn $d > 30^0$ ist; dieselben liegen dann auf einem um ω mit $tg\,2d\sqrt{\frac{2}{3}}$ beschriebenen Kreise; je zwei fallen zusammmen in die Endpunkte der kleinsten Radienvectoren für $d = 30^0$.

Um die Aufgabe „den Berührungspunkt $\mathfrak{P}_0$ einer an die Kurve unter bestimmtem Winkel gezogenen Tangente zu construiren", ausführen zu können, construire man sich eine Hilfskurve, deren Punkte die Coordinaten $\zeta = \sin 2\alpha$; $\eta = \sin 2\alpha'$ haben. Derjenige Radiusvector, welcher mit der ζ Achse den Winkel $\tau - 90^0$ bildet, liefert $\sin 2\alpha'$, dadurch $tg\,\alpha'$ also den gesuchten Berührungspunkt. — Die Hilfskurve liegt symmetrisch zu den Coordinatenachsen und den Winkelhalbirungslinien derselben und schneidet alle diese Linien unter rechtem Winkel. Da es in jedem Quadranten, sobald $d > 30^0$, zwei Tangenten gibt, welche mit der ζ Achse einen Winkel von 135^0 bilden, hat sie in diesem Falle vier zu den Winkelhalbirungslinien symmetrische Schleifen.

Ohne Mühe kann man die gewonnenen Resultate auf die sphärische Polkurve übertragen und sich so von deren Verlauf ein Bild schaffen.

Eine directe Construction des dieselbe tangirenden grössten Kreises ergibt sich daraus, dass Polbahn und Polkurve einander berühren. Man bestimmt also auf AA' die Brennpunkte einer Ellipse, deren grosse Halbachse $= d$, und deren kleine durch die Relation

$$tg\,b = \sin d \,.\, \sqrt{\cos 2d}$$

gegeben ist, und behandelt $\mathfrak{P}$ als Punkt dieser Kurve.

Krümmungsradius.

Da sich der Durchmesser des Wendekreises leicht finden lässt, der Krümmungsradius der Polbahn bekannt ist, wäre die Herstellung einer Formel für den der Polkurve nur Sache der Rechnung; letztere liefert aber einen Ausdruck, welcher zu complicirt ist, um discutirbar zu sein; wir beschränken uns daher auf die Construction.

Man sucht erst die gemeinschaftliche Poltangente, entweder nach einer der früheren Methoden, oder da (Aronhold, Grundzüge etc. § 7, Satz IX) A und K, A' und K' zugehörige Krümmungsmittelpunkte sind, also L, der Schnittpunkt der Kreise AA' und $K'K$ das Collineationscentrum bildet, indem man durch $\mathfrak{P}$ einen grössten Kreis legt, welcher mit $A'K'$ denselben Winkel bildet, wie AK mit $L\mathfrak{P}$ und umgekehrt. Ist dann M' der nach Seite 18 construirte Krümmungsmittelpunkt der sph. Ellipse, so trifft, wenn S der Schnittpunkt von $M'A'$ mit dem zu $A'K'$ in $\mathfrak{P}$ normalen Hauptkreise ist, SK' den Kreis $M'\mathfrak{P}$ in M, dem sph. Krümmungsmittelpunkte der Polkurve.

Werden nämlich $A'K'$; $M'M$ als zugehörige Krümmungsmittelpunkte aufgefasst, so ist, da die Poltangente zur Centralen $M'\mathfrak{P}$ senkrecht steht, auch die Collineationsachse $\mathfrak{P}L$ zur andern Centralen $A'K'$ normal. Die weitere Construction folgt sofort aus dem Bobillier'schen Satze.

Polkurve und Polbahn.

Wenn die Polkurve auf der Polbahn rollt, fallen bestimmte Punkte beider aufeinander; wir geben später (Seite 31) die genauen Relationen, mit deren Hilfe sich zu jedem Punkte der einen Kurve der zugeordnete der andern ergibt.

Zuvörderst genügen die Gleichungen:

$$\cos\alpha \,.\, \cos A\mathfrak{P} = \cos\alpha' \,.\, \cos A'\mathfrak{P}$$

und

$$\cos\alpha \,.\, \cos\alpha' = \cos 2d$$

Nach denselben entsprechen den Endpunkten A und A' der grossen und D; D' der kleinen Achse der sphärischen Ellipse die Endpunkte A_1; A_2; A'_1; A'_2 der grössten und D_1; D_2; D'_1; D'_2 der kleinsten Durchmesser der Polkurve.

Letzteres lehrt auch eine einfache kinematische Betrachtung; die sphärische Ellipse wird nemlich von jeder Hälfte der Polkurve einmal umrollt; durch das Rollen der ersten Hälfte wird k um 180^0 aus der Anfangslage, durch das der zweiten in die Anfangslage zurückgebracht. Daraus folgt:

Der Umfang der Polkurve ist doppelt so gross als der der Polbahn.

Während des Rollens umschliesst die Polkurve die Polbahn, und zwar für jedes beliebige d.

Man erkennt dies am besten durch Umkehrung der Bewegung. — Es ergibt sich dann sofort, dass AA' stets innerhalb der Polkurve liegen muss und, da dies die grosse Achse der sphärischen Ellipse ist, auch diese selbst.

Wir bemerken noch, dass, während der „grösste Radiusvector" der Polbahn von 0^0—45^0, der der Polkurve von 0^0—90^0 wächst, der „kleinste Radiusvector beider Kurven für $d = 30^0$ sein Maximum erreicht.

Projection der Polbahnen.

Wir können die Projection der Polbahnen auf zwei zu einander senkrechte Ebenen nach zweierlei Methoden ausführen. Die eine Art derselben beruht nur auf dem im Thema Gegebenen, die andere benützt auch die durch die vorangegangene Untersuchung gewonnenen Resultate.

Methoden der ersten Art gibt es demnach, allein entsprechend den gegebenen Fassungen, drei. Die letzte derselben ist die einfachste und wir zeigen, wie sich mit ihrer Hilfe die Polkurve zeichnen liesse.

Statt des Bogens $2d$ lassen wir die Sehne desselben 2δ auf k und k' gleiten, die Ebene des grössten Kreises k' wählen wir zur ersten, die von k zur zweiten Projectionsebene.

Ist alsdann A ein Punkt von k und AA_0 das von A auf die Projectionsachse gefällte Loth, so finden wir den zu A zugehörigen Punkt A' auf k' durch eine sehr einfache Construction, weil

$$A_0A' = \sqrt{4\delta^2 - AA_0{}^2}$$

ist.

AO ist dann die erste Projection des in A zu k normalen grössten Kreises; eine durch A'_1 und K' gehende Ellipse E', die des in A' zu k' normalen grössten Kreises. Der Schnittpunkt von AO und E'_1 ist die erste Projection des Poles.

Genauere Zeichnungen erhält man mit Hilfe folgender Methode der zweiten Art; wir erläutern dieselbe wiederum an der Polkurve.

Man construirt nach den Angaben auf Seite 20 den Schnitt des Polkegels mit der Tangentialebene der Kugel in ω. $\omega\mathfrak{P}^0$ sei irgend ein Radiusvector desselben; ν der Winkel, dessen Tangente $= \omega\mathfrak{P}^0$ ist, so gibt $\sin\nu = \omega\mathfrak{P}_2$ auf $\omega\mathfrak{P}^0$ abgetragen die erste Projection von $\mathfrak{P}$ und die zweite wird entweder durch einfaches Herauflothen gefunden oder dadurch, dass man auf $O_1\omega_1$ von O_1 aus $\cos\nu$ abträgt und durch den so gefundenen Punkt L eine Parallele zieht, welche $O\mathfrak{P}_1{}^0$ in $\mathfrak{P}_1$ schneidet. Letzteres Verfahren wird besonders dann nöthig, wenn $O_1\mathfrak{P}_1{}^0$ mit $O_1\omega_1$ zusammenfällt oder einen kleinen Winkel bildet.

Da $tg\, 2d$ von 0 bis ∞ wächst, kann die Schnittkurve des beweglichen Polkegels mit der Tangentialebene leicht zu grosse Dimensionen annehmen. Man zeichnet dann dieselbe für einen kleineren Radius, construirt aber $\sin\nu$ und $\cos\nu$ für eine beliebige Strecke als Einheit.

Rectification der Polbahnen.[1])

Bogenelement einer sphärischen Kurve.

Seien ϱ und ψ die sphärischen Polarcoodinaten eines Punktes für M als Pol, also $tg\,\varrho = r$ und ψ diejenigen seiner Centralprojection aus dem Mittelpunkte der Kugel auf die Tangentialebene in M, bedeute endlich ds ein Bogenelement auf der Kugel, ds_0 das entsprechende in der Tangentialebene, so ist

$$ds^2 = (\sin\varrho\,.\,d\psi)^2 + d\varrho^2 = \frac{r^2}{1+r^2}\,d\psi^2 + (d\,\mathrm{arc}\,tg\,r)^2$$

$$= \frac{r^2\,.\,d\psi^2}{1+r^2} + \frac{dr^2}{(1+r^2)^2} = \frac{r^2.d\psi^2 + dr^2 + r^4\,d\psi^2}{(1+r^2)^2}$$

$$= ds^2 = \frac{ds_0{}^2 + r^4\,d\psi^2}{(1+r^2)^2}$$

Diese Formel geht für rechtwinklige Coordinaten α und β, weil

$$r^2.d\psi = r^2.\cos^2\psi\,.\,d\,tg\,\psi = \alpha^2\,.\,d\frac{\beta}{\alpha} = (\alpha\,.\,d\beta - \beta\,d\alpha)\text{ ist,}$$

über in

$$ds^2 = \frac{d\alpha^2 + d\beta^2 + (\alpha\,.\,d\beta - \beta\,.\,d\alpha)^2}{(1+\alpha^2+\beta^2)^2}$$

Polbahn.

Die Centralprojection derselben ist eine Ellipse; die Bogenlänge ds_0 einer solchen drückt sich durch die Substitutionen

---

1) Obzwar bereits Hesse in seiner Analytischen Geometrie des Raumes (pag. 317) die Bogenlänge der sphärischen Ellipse durch elliptische Kugelcoordinaten mit gewohnter Eleganz dargestellt hat, sei es mir doch gestattet, im Folgenden die Brauchbarkeit einer Substitution nachzuweisen, welche sowohl direkt den zu Grunde liegenden Modul als auch mit Leichtigkeit die Beziehung zwischen entsprechenden Punkten von Pol-Bahn und Kurve ergiebt.

$$\alpha = a \,.\, \sin\varphi; \quad \beta = b \,.\, \cos\varphi$$

sehr einfach aus und wir prüfen daher die Brauchbarkeit dieser Formeln für die sphärische Ellipse. Es ist

$$d\alpha = a \,.\, \cos\varphi \,.\, d\varphi; \; \beta\, d\alpha = a \,.\, b \,.\, \cos^2\varphi \,.\, d\varphi$$

$$d\beta = -b \,.\, \sin\varphi \,.\, d\varphi; \quad \alpha \,.\, d\beta = -a \,.\, b \,.\, \sin^2\varphi \,.\, d\varphi$$

folglich

$$ds^2 = d\varphi^2 \,.\, \frac{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi + a^2b^2}{(1 + a^2\sin^2\varphi + b^2 \,.\, \cos^2\varphi)^2}$$

$$\int ds = \frac{a}{\sqrt{1+b^2}} \int_0^{\varphi} d\varphi \,.\, \frac{\sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2(1+b^2)}\sin^2\varphi}}{1 + \frac{a^2 - b^2}{1+b^2} \,.\, \sin^2\varphi}$$

Wir setzen

$$\frac{a^2(1+b^2)}{a^2 - b^2} = k^2$$

wo k^2 jedenfalls $\lessgtr \frac{1}{0}$ ist und

$$\frac{a^2 - b^2}{1+b^2} = n$$

wo n jedenfalls positiv ist.

Dann ist

$$\frac{\sqrt{1+b^2}}{a}\int ds = \int \frac{d\varphi}{(1 + n \,.\, \sin^2\varphi)\Delta\varphi} - \int \frac{k^2 \,.\, \sin^2\varphi \,.\, d\varphi}{(1 + n \,.\, \sin^2\varphi)\Delta\varphi}$$

$$= F(\varphi) - (n + k^2) \,.\, \int_0^{\varphi} \frac{\sin^2\varphi \,.\, d\varphi}{(1 + n \,.\, \sin^2\varphi)\Delta\varphi}$$

Das letzte Integral ist ein elliptisches Integral der dritten Gattung, also n, weil positiv, gleich $-\, k^2 \,.\, \sin^2 am\, ia'$ zu nehmen; dadurch erhalten wir

$$\frac{\sqrt{1+b^2}}{a} \,.\, \int ds = u + \frac{n + k^2}{n} \int_0^u \frac{k^2 \,.\, \sin^2 am\, ia' \,.\, \sin^2 am\, u \,.\, du}{1 - k^2 \,.\, \sin am\, ia' \,.\, \sin^2 am\, u}$$

$$= u + \frac{n + k^2}{n} \,.\, \frac{tg\, am\, ia'}{\Delta\, am\, ia'} \,.\, \Pi(u, ia')$$

Nun ist aber, weil

$$\sin am\, ia' = \frac{i.\sqrt{n}}{k}$$

$$tg\, am\, ia' = \frac{i.\sqrt{n}}{\sqrt{n+k^2}}; \quad \Delta am\, ia' = i.\sqrt{1+n}$$

ist,

$$\frac{\sqrt{1+b^2}}{a}.\int ds = u + \frac{\sqrt{n+k^2}}{\sqrt{n}.\sqrt{1+n}}.i\,\Pi(u, i\,a')$$

$$= u + \frac{\sqrt{1+a^2}}{a.\sqrt{1+a^2 k^2}}.i\,\Pi(u, ia')$$

mithin wegen der Relation

$$\sqrt{\frac{1+a^2}{1+b^2}} = \sqrt{1+n} = \sqrt{1+a^2 k^2}$$

$$\int ds = \frac{a}{\sqrt{1+b^2}}.u + i.\Pi(u, i\,a').$$

Wenden wir diese Formel auf unsere Ellipse an, bei welcher

$$a = tg\, d; \quad b = \sin d.\sqrt{\cos 2d}$$

ist, so wird

$$\int ds = \frac{tg\, d}{\sqrt{1+\sin^2 d \cos 2d}}.u + i.\Pi(u, ia')$$

während

$$k^2 = tg^2 d.\frac{1+2.\cos^2 d}{1+2.\sin^2 d}; \quad k'^2 = \frac{1}{\cos^2 d}.\frac{1-2\sin^2 d}{1+2.\sin^2 d}$$

$$n = tg^4 d.\frac{1+2.\cos^2 d}{1+2.\sin^2 d}; \quad am(a', k') = d \text{ ist,}$$

letzteres weil

$$n = tg^4 d \frac{1 + 2\cos^2 d}{1 + 2\sin^2 d} = -tg^2 d \cdot \frac{1 + 2\cos^2 d}{1 + 2 . \sin^2 d} . \sin^2 am(ia')$$

also

$$tg^2 d = -\sin^2 am(ia') = -(i\, tg\, am(a', k')^2 = tg^2 am(a', k')$$

ist.

Polkurve.

Wir suchen nunmehr die Relationen auf, welche zwischen entsprechenden Punkten der Polbahn und Polkurve existiren. Sei $\mathfrak{P}$ der momentane Pol, M der Mittelpunkt der sph. Ellipse, C Pol des Kreises AA', P derjenige des Kreises MC; $C\mathfrak{P}$ treffe AA' in D, $P\mathfrak{P}$ MC in D_1, dann sind

$$\text{arc}\, MD = \alpha_0 ; \quad \text{arc}\, \omega A = A_0$$

$$\text{arc}\, MD_1 = \beta_0 ; \quad \text{arc.}\, \omega A_1 = B_0$$

die rechtw. sphärischen Coordinaten eines Punktes $\mathfrak{P}$ der Polbahn, respective der Polkurve und

$$tg\, \alpha_0 = \alpha ; \qquad tg\, A_0 = A$$

$$tg\, \beta_0 = \beta ; \qquad tg\, B_0 = B$$

diejenigen der Punkte $\mathfrak{P}_0$ in den Schnittkurven der Polkegel mit den Tangentialebenen in M, resp. ω.

Benennen wir noch Winkel $DA\mathfrak{P}$ mit ν, so ergibt die Betrachtung der Dreiecke $PD\mathfrak{P}$ und $AD\mathfrak{P}$

$$tg\, D\mathfrak{P} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_0\right) . tg\, \beta_0 = \sin(d + \alpha_0)\, tg\, \nu$$

also
$$tg\, \nu = \frac{\cos \alpha_0 . tg\, \beta_0}{\sin(d + \alpha_0)}$$

und Dreieck $A'A\omega$ lehrt, dass

$$tg\, 2d . \sin \nu = tg\, A_0 ; \quad \sin 2d . \cos \nu = \sin B_0$$

ist; folglich wird

$$A = tg\,A_0 = \frac{tg\,2d\,.\cos\alpha_0\,.\,tg\,\beta_0}{\sqrt{\sin(d+\alpha_0)^2 + \cos^2\alpha_0\,tg^2\beta_0}}$$

$$B = tg\,B_0 = \frac{\sin 2d\,.\sin(d+\alpha_0)}{\sqrt{\sin(d+\alpha_0)^2\,.\cos^2 2d + \cos^2\alpha_0\,tg^2\beta_0}}$$

Führen wir endlich auch hier die Substitutionen

$$tg\,\alpha_0 = tg\,d\,.\sin\varphi;\quad tg\,\beta_0 = \sin d\,.\sqrt{\cos 2d}\,.\cos\varphi$$

ein, so erhalten wir nach einigen leichten Umformungen

$$B = \frac{\sin 2d}{\sqrt{\cos 2d}}\,\frac{\cos\varphi}{\sqrt{(1+\sin\varphi)^2\cos 2d + \cos^2\varphi}}$$

$$A = \frac{\sin 2d}{\sqrt{\cos 2d}}\,\frac{1+\sin\varphi}{\sqrt{(1+\sin\varphi)^2\cos 2d + \cos^2\varphi}}$$

und es folgt aus Satz II der Einleitung.

Mit Hilfe obiger Substitutionen muss sich für die Bogenlänge der Polkurve 8ten Grades die Formel

$$\int ds = \frac{tg\,d}{\sqrt{1+\sin^2 d\cos 2d}}\,.\,u + i\,.\,\Pi(u\,ia')$$

ergeben.

Inhaltsangabe.